Persamaan dan Fungsi Kuadrat

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar

Setelah mengikuti pembelajaran persamaan siswa mampu:

1. menghayati pola hidup disiplin, kritis, bertanggungjawab, konsisten dan jujur serta menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari;
2. memahami persamaan dan fungsi kuadrat, memilih strategi dan menerapkan untuk menyelesaikan persamaan kuadrat serta memeriksa kebenaran jawabannya;
3. menganalisis persamaan kuadrat dalam berbagai bentuk penyajian masalah kontekstual;
4. Memahami konsep dan prinsip persamaan dan fungsi kuadrat serta menggambarkan grafiknya dalam sistem koordinat;
5. memahami berbagai bentuk ekspresi yang dapat diubah menjadi persamaan kuadrat dan mengidentifikasi sifat-sifatnya;
6. menganalisis persamaan kuadrat dari data terkait masalah nyata dan menentukan model matematika berupa persamaan kuadrat dan fungsi kuadrat;
7. memahami persamaan dan fungsi kuadrat, memilih strategi dan menerapkan untuk menyelesaikan masalah nyata serta memeriksa kebenaran jawabannya;
8. menganalisis grafik fungsi dari data terkait masalah nyata dan menentukan model matematika berupa fungsi kuadrat.

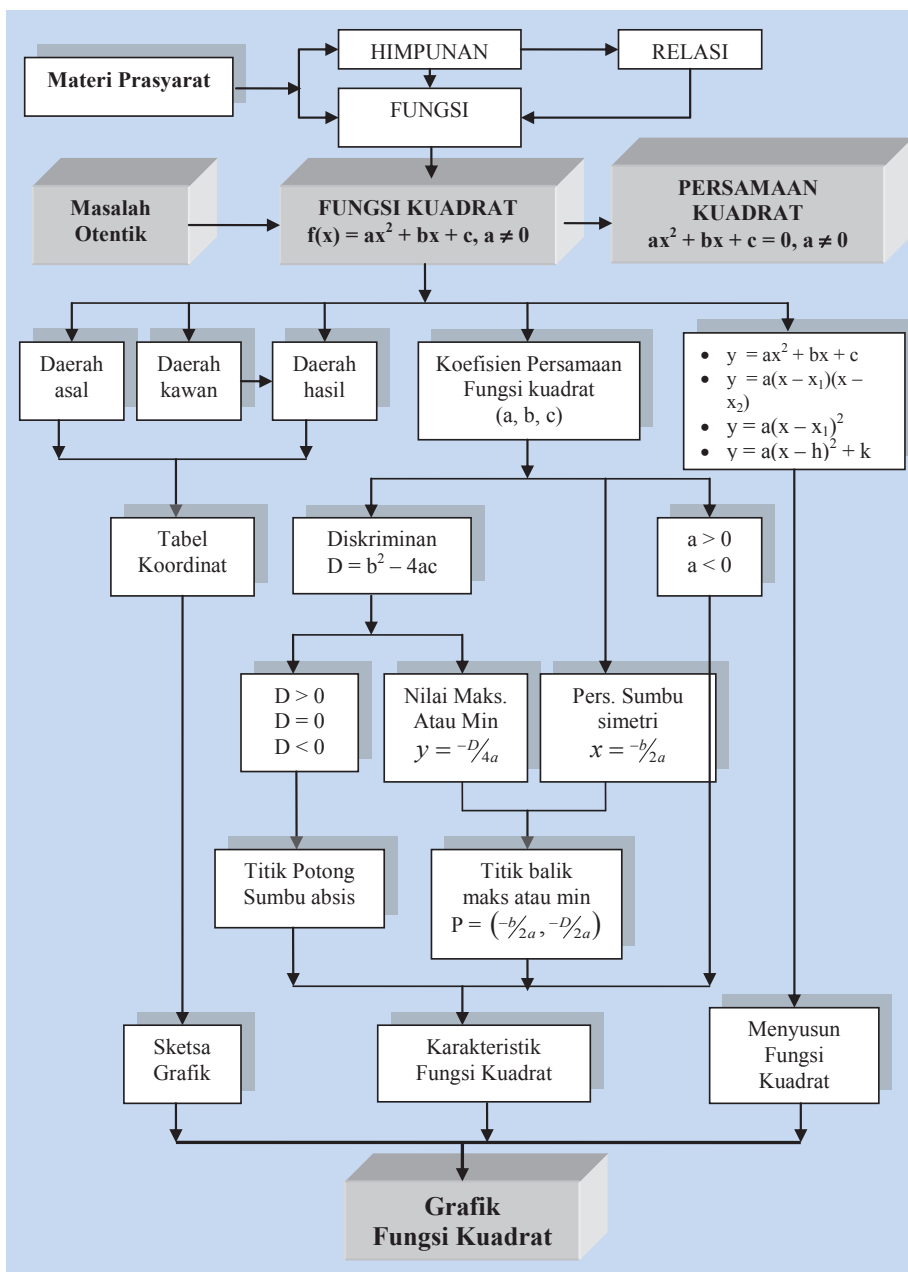
Pengalaman Belajar

Melalui pembelajaran materi fungsi kuadrat, siswa memperoleh pengalaman belajar:

- menjelaskan karakteristik masalah otentik yang pemecahannya terkait dengan model matematika sebagai persamaan kuadrat;
- merancang model matematika dari sebuah permasalahan otentik yang berkaitan dengan persamaan dan fungsi kuadrat;
- menyelesaikan model matematika untuk mem-peroleh solusi permasalahan yang diberikan;
- menafsirkan hasil pemecahan masalah;
- menuliskan ciri-ciri persamaan dan fungsi kuadrat. dari beberapa model matematika;
- menuliskan konsep persamaan dan fungsi kuadrat. berdasarkan ciri-ciri yang ditemukan dengan bahasanya sendiri;
- menurunkan sifat-sifat dan aturan matematika yang berkaitan dengan persamaan dan fungsi kuadrat berdasarkan konsep yang sudah dimiliki;
- menentukan akar-akar persamaan kuadrat dengan pemfaktoran, melengkapkan kuadrat sempurna, dan rumus *abc*;
- menentukan jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat;
- menyusun persamaan kuadrat yang akar-akarnya memenuhi kondisi tertentu;
- menggunakan konsep dan prinsip persamaan kuadrat untuk memecahkan masalah otentik;
- menentukan persamaan sumbu simetri dan titik puncak grafik fungsi kuadrat;
- menggambarkan grafik fungsi kuadrat;
- menentukan fungsi kuadrat, jika diberi tiga titik yang tidak segaris;
- menjelaskan kaitan fungsi kuadrat dan persamaan kuadrat;
- menggunakan konsep dan prinsip fungsi kuadrat untuk memecahkan masalah otentik dan soal-soal.

Istilah Penting

- *Persamaan Kuadrat*
- *Peubah*
- *Koefisien*
- *Konstanta*
- *Akar-akar Persamaan*
- *Fungsi kuadrat*
- *Parabola*
- *Sumbu Simetri*
- *Titik Puncak*
- *Nilai Maksimum dan Minimum*

B. PETA KONSEP

C. MATERI PEMBELAJARAN

I. PERSAMAAN KUADRAT

1. Menemukan Konsep Persamaan Kuadrat Satu Peubah

Banyak permasalahan dalam kehidupan yang pemecahannya terkait dengan konsep dan aturan-aturan dalam matematika. Secara khusus keterkaitan konsep dan prinsip-prinsip persamaan kuadrat, sering kita temukan dalam permasalahan kehidupan nyata yang menyatu/bersumber dari fakta dan lingkungan budaya kita. Konsep persamaan kuadrat dapat dibangun/ditemukan di dalam pemecahan permasalahan yang kita hadapi. Untuk itu perhatikan dan selesaikan dengan cermat permasalahan-permasalahan yang diberikan.

Di dalam proses pemecahan masalah-masalah yang diberikan, kamu cermati objek-objek budaya atau objek lingkungan budaya yang dilibatkan dalam permasalahan yang diberikan. Objek-objek itu menjadi bahan aspirasi/inspirasi, karena terkadang ada konsep matematika melekat pada objek itu yang tidak kita sadari dan ternyata sebagai kata kunci dalam penyelesaian masalah. Demikian juga kamu tidak boleh mengabaikan atau melupakan konsep-konsep dan aturan-aturan matematika yang telah dipelajari sebelumnya, baik di tingkat SD, SMP, bahkan pada materi yang baru saja kamu pelajari.

Dalam menyelesaikan masalah matematika, kamu bisa pada kesepakatan antara kamu dan teman-teman serta guru, saling terkait materinya, menggunakan variabel-variabel, bersifat abstrak sebab matematika adalah hasil abstraksi pemikiran manusia. Matematika menganut kebenaran konsistensi atau tidak boleh ada di dalamnya, unsur-unsur, simbol-simbol, konsep-konsep, dan rumus-rumus yang saling bertentangan. Alat ukur kebenarannya, jika konsep yang ditemukan, ukuran kebenarannya apabila konsep tersebut diterima pada struktur matematika yang sudah ada sebelumnya. Jika prinsip (rumus-rumus, sifat-sifat) yang ditemukan, ukuran kebenarannya dapat dibuktikan kebenarannya menggunakan konsep atau aturan yang sudah ada sebelumnya.

Masalah-7.1

Arsitek Ferdinand Silaban merancang sebuah rumah adat Batak di daerah Tuk-tuk di tepi Danau Toba. Ia menginginkan luas penampang atap bagian depan $12\ m^2$. Di dalam penampang dibentuk sebuah persegi panjang tempat ornamen (ukiran) Batak dengan ukuran lebar 2 m dan tingginya 3 m. Bantulah Pak Silaban menentukan panjang alas penampang atap dan tinggi atap bagian depan!

Gambar 7.1 Rumah Adat

Pahamilah masalah di atas, artinya kamu tuliskan hal apa yang diketahui, apa yang ditanyakan, dan sajikan/dekati masalah dalam gambar. Gunakan variabel untuk menyatakan masalah dalam matematika. Ingat konsep dan aturan-aturan apa saja yang terkait dengan masalah yang dihadapi supaya dapat terpecahkan. Perhatikan konsep apa yang melekat pada penampang depan atap rumah adat tersebut. Gunakan sebagai langkah awal untuk menyelesaikan masalah. Ingat kembali apa yang dimaksud dua bangun dikatakan kongruen dan lakukan perbandingan panjang sisi-sisi kedua bangun tersebut untuk memperoleh persamaan tinggi penampang atap.

Ingat kembali materi persamaan kuadrat yang telah dipelajari di SMP, bagaimana cara menentukan nilai variabel dengan menggunakan manipulasi aljabar pada persamaan yang diperoleh? Berdasarkan nilai variabel akan ditentukan tinggi penampang atap dan panjang alasnya.

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

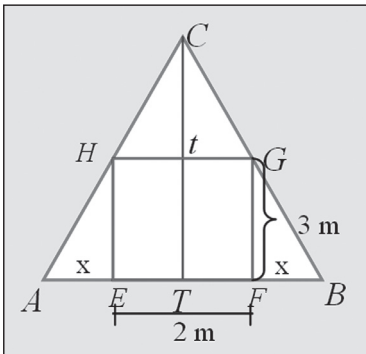
Luas penampang atap bagian depan $12\ m^2$

Ukuran persegi panjang tempat ornamen adalah $3\ m \times 2\ m$

Ditanya:

a. Panjang alas penampang atap

b. Tinggi atap

Kamu ilustrasikan masalah di atas seperti gambar berikut!

Gambar 7.2 Penampang Atap Bagian atas

- Memperhatikan konsep apa yang melekat pada penampang depan atap rumah adat tersebut.

Kamu cermati segitiga sama kaki *ABC* dan lakukan hal berikut.
Misalkan panjang $AE = FB = x$ m.
Karena penampang atap rumah berbentuk segitiga sama kaki, maka

$$\text{Luas} = \frac{1}{2} \times \text{panjang alas} \times \text{tinggi}$$

$$L = \frac{1}{2} \times (AE + EF + FB) \times t$$

$$12 = \frac{1}{2} t(x + 2 + x)$$

$$12 = t(1 + x) \quad \text{.......................................} \quad (1)$$

Perhatikan segitiga *CTB* dan segitiga *GFB*. Kedua segitiga tersebut sebangun.

$$\frac{GT}{GF} = \frac{TB}{FB} \Leftrightarrow \frac{t}{3} = \frac{1+x}{x}$$

$$\Rightarrow t = \frac{3+3x}{x} \quad \text{.......................................} \quad (2)$$

Substitusikan persamaan 2) ke persamaan 1) sehingga diperoleh

$$12 = \left(\frac{3+3x}{x}\right)(1 + x) \Leftrightarrow 12x = (3 + 3x)(1 + x)$$

$$\Rightarrow 12x = 3 + 3x + 3x + 3x^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 6x - 12x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0$$

$\therefore x^2 - 2x + 1 = 0$ .... (3)

Ingat kembali materi persamaan kuadrat yang telah dipelajari di SMP, bagaimana cara menentukan nilai-nilai x dengan melakukan manipulasi aljabar pada persamaan (3). Berdasarkan persamaan (3) akan ditentukan nilai-nilai x.

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - x - x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x(x-1) - 1(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1$$

- Apa makna dari $a \times b = 0$ dan apa kaitannya dengan $(x-1)(x-1) = 0$

Dengan menggunakan nilai x akan ditentukan nilai t.

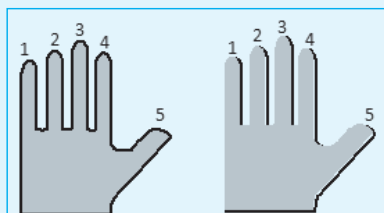
Untuk $x = 1$ diperoleh $t = \dfrac{3-3x}{x} = 6$.

Sehingga diperoleh panjang alas dan tinggi penampang atap rumah adalah 4 m dan 6 m.

Sering kita temui orang tua yang sudah lanjut usia, mampu menghitung harga telur (banyak telur, cukup banyak) tanpa menggunakan kalkulator dengan waktu cukup singkat. Sementara orang tua tersebut tidak pernah menduduki jenjang pendidikan. Ternyata mereka memiliki warisan dari leluhur cara menjumlahkan dan mengalikan bilangan. Agar kamu mengetahuinya, gunakan jari tanganmu dan pecahkan Masalah 7.2 berikut.

Masalah-7.2

Nenek moyang salah satu suku di Indonesia dalam melakukan operasi hitung penjumlahan dan perkalian mereka menggunakan basis lima dengan fakta bahwa banyak jari tangan kiri atau kanan adalah lima. Coba bantu temukan aturan perkalian untuk menentukan hasil kali bilangan x dan y dengan

a. $5 < x, y < 10$, dengan $x, y \in N$
b. $x = 5$ dan $y \geq 5$, dengan $x, y \in N$

Gambar 7.3 Jari Tangan

Sebelum menemukan aturan perkalian bilangan-bilangan yang dibatasi pada bagian a) dan b), coba pilih dua bilangan x dan y, $5 < x, y < 10$, dengan $x, y \in N$ (misalnya, 6×8). Ingat apa arti basis 5, lakukan pencacahan bilangan 6 di jari tangan kiri dan bilangan 8 di jari tangan kanan. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut!

1) Setelah kamu mencacah satu kali bilangan x di tangan kiri, ada berapa banyak jari yang terpakai dan yang tidak terpakai pada pencacahan kedua kali?
2) Setelah kamu mencacah satu kali bilangan y di tangan kanan, ada berapa banyak jari yang terpakai dan yang tidak terpakai pada pencacahan kedua kali?
3) Berapa jumlah banyak jari yang terpakai pada tangan kiri dan banyak jari yang terpakai pada tangan kanan pada saat pencacahan kedua kali?
4) Berapa hasil kali jumlah jari yang terpakai di tangan kiri dan jari di tangan kanan dengan hasil pada langkah 3)?
5) Berapa banyak jari yang tidak terpakai di tangan kiri saat pencacahan kedua kali ?
6) Berapa banyak jari yang tidak terpakai di tangan kanan saat pencacahan kedua kali?
7) Berapa hasil kali bilangan pada langkah 5) dan 6)?
8) Berapa hasil jumlah bilangan pada langkah 4) dan 7)

Berdasarkan 8 langkah penentuan hasil perkalian bilangan x dan y, bekerjasama dengan temanmu satu kelompok untuk menemukan aturan perkalian dua buah bilangan x dan y, $5 < x, y < 10$, dengan $x, y \in N$.

Alternatif Penyelesaian

Misalkan: z adalah bilangan basis (dalam contoh = 5)

$x = z + a,\ \ a < z$

$y = z + b,\ \ b < z$

1. hitung $(a + b)$
2. hitung $(z + z) = 2z$
3. kalikan hasil langkah 1) dan 2), yaitu $(a + b)\ 2z$
4. hitung $(z – a)$
5. hitung $(z – b)$
6. kalikan hasil langkah 4) dan 5), yaitu $(z – a)\ (z – b)$
7. jumlahkan hasil langkah 3) dan 6), yaitu $(a + b)\ 2z + (z – a)\ (z – b)$
8. diperoleh $x \times y = (a + b)\ 2z + (z – a)\ (z – b)$, $5 < x, y < 10$, $x, y \in$ N

Untuk contoh di atas diperoleh

$6 \times 8 = (a + b)\ 2z + (z – a)(z – b)$

$48 = 8z + (z – 1)\ (z – 3)$

$\therefore\ z^2 + 4z - 45 = 0$ .... (1)

Latihan 7.1

Cermati aturan perkalian pada bagian a) dan mencoba menemukan aturan perkalian bilangan pada bagian b). Awali kerja kamu dengan memilih dua bilangan $x = 5$ dan $y \geq 5$, dengan $x, y \in N$. Ingat apa arti basis 5, lakukan pencacahan bilangan x di jari tangan kiri dan bilangan y di jari tangan kanan.

Masalah-7.3

Pak Anas memiliki tambak ikan mas di hulu sungai yang berada di belakang rumahnya. Setiap pagi, ia pergi ke tambak tersebut naik perahu melalui sungai yang berada di belakang rumahnya. Dengan perahu memerlukan waktu 1 jam lebih lama menuju tambak dari pada pulangnya. Jika laju air sungai 4 km/jam dan jarak tambak dari rumah 6 km, berapa laju perahu dalam air yang tenang?

Gambar 7.4 Sungai

Ilustrasi masalah dapat dicermati pada gambar berikut.

Selesaikanlah masalah di atas, agar pekerjaan kamu lebih efektif renungkan beberapa pertanyaan berikut.

1) Bagaimana kecepatan perahu saat menuju hulu sungai dan kecepatan perahu saat Pak Anas pulang?
2) Jika diasumsikan perahu tidak pernah berhenti sebelum sampai ditujuan, apa yang dapat kamu simpulkan dari keadaan perahu?
3) Coba temukan bentuk perasamaan kuadrat dalam langkah pemecahan masalah tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Misalkan V_a adalah kecepatan air sungai dengan $V_a = 4$ km/jam
V_{hu} adalah kecepatan perahu kehulu
V_{hi} adalah kecepatan perahu saat pulang
V_t adalah kecepatan perahu dalam air tenang
t_1 adalah waktu yang diperlukan menuju Tambak
t_2 adalah waktu yang digunakan menuju rumah (pulang)
S adalah jarak tambak dari rumah Pak Anas

Bagaimana kecepatan perahu saat pergi kehulu dan saat menuju hilir (pulang)?
Kecepatan perahu saat menuju hulu sungai menentang kecepatan air dan saat Pak Anas pulang, kecepatan perahu searah dengan kecepatan air sungai mengalir. Sehingga, Jika dimisalkan $V_{at} = x$ km/jam maka
$V_{hu} = x - 4$ dan $V_{hi} = x + 4$
Diasumsikan perahu tidak pernah berhenti sebelum sampai di tujuan, berarti

$x \neq -4$ dan $x \neq 4$.

$$t_1 - t_2 = \frac{S}{V_{hu}} - \frac{S}{V_{hi}} = 1$$

$$\frac{6}{x - 4} - \frac{6}{x + 4} = 1$$

$$6(x + 4) - 6(x - 4) = (x + 4)(x - 4)$$

$$6x + 24 - 6x + 24 = x^2 + 4x - 4x - 16$$

$$48 = x^2 - 16$$

$$\therefore x^2 - 64 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$x^2 - 64 = 0 \Rightarrow (x - 8)(x + 8) = 0$

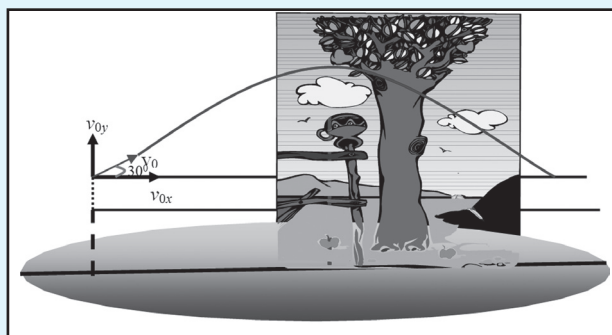
$\Rightarrow x - 8 = 0$ atau $x + 8 = 0$

$\Rightarrow x = 8$ atau $x = -8$

Kecepatan perahu di air tenang adalah $V_{at} = x = 8$ km/jam.
Nilai $x = -8$ tidak berlaku sebab kecepatan perahu bergerak maju selalu bernilai positif.

Kejadian dalam Masalah 7.4 yang akan dibahas, sering dialami oleh penggembala kerbau di tengah padang rumput yang penuh dengan pepohonan. Tentu kamu mengenal ketapel yang sering digunakan para petani untuk mengusir burung dikala padi sedang menguning. Mari kita temukan sebuah model matematika berupa persamaan kuadrat dari permasalahan berikut.

Masalah-7.4

Ronald anak Pak Sulaiman sedang asyik menunggang kerbau. Tiba-tiba ia melihat seekor burung yang berada di pohon dengan ketinggian 8m dari tanah. Ronald mengarahkan ketapelnya dengan sudut 30°, ternyata batu ketapel mengenai burung saat batu mencapai ketinggian maksimum. Berapa kecepatan batu bergerak? (gravitasi bumi = 10 m/det²).
Ilustrasi masalah, dapat kamu cermati pada gambar di bawah ini.

Gambar 7.5 Posisi Burung di Pohon

Coba jelaskan pada temanmu pernyataan berikut.
Pada Sumbu-x, batu bergerak lurus beraturan, apa artinya?
Pada Sumbu-y, batu bergerak lurus berubah beraturan, apa artinya?
Renungkan beberapa pertanyaan berikut, agar kamu lebih mudah memecahkan masalah.

1) Bagaimana hubungan kecepatan anak ketapel bergerak menuju burung dengan kecepatan anak ketapel arah vertikal?
2) Saat batu mencapai ketinggian maksimum (h_{maks}) dan mengenai burung, Bagaimana kecepatan batu (V_{yP}) ?
3) Bagaimana menentukan ketinggian yang dicapai anak ketapel setiap detiknya? Bagaimana pengaruh gravitasi bumi dalam hal ini ?
4) Tentukan kecepatan anak ketapel dengan memanfaatkan apa yang diketahui dalam soal!

Alternatif Penyelesaian

Diketahui: $h_{maks} = 8$ m dan $\alpha = 30^o$

$V_{ox} = V_o \cos \alpha$; $V_{oy} = V_o \sin \alpha$

Pada Sumbu-x, batu bergerak lurus beraturan

Pada Sumbu-y, batu bergerak lurus berubah beraturan

Saat batu mencapai ketinggian maksimum dan mengenai burung, $V_{yP} = 0$

$$V_{yP} = V_{0y} - gt \quad \Rightarrow 0 = V_{0y} - gt$$

$$\Rightarrow t_{oP} = \frac{V_{0y}}{g}$$

$$\Rightarrow t_{oP} = \frac{V_0 \sin \alpha}{g}$$

- Apa yang dimaksud ketinggian maksimum yang dicapai anak ketapel. Bagaimana kecepatan anak ketapel saat mencapai ketinggian maksimum

$$h_{\max} = V_{0y}\, t_{oP} - \frac{1}{2} g t_{oP}^2$$

$$= V_0 \sin \alpha \frac{V_0 \sin \alpha}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{V_0 \sin \alpha}{g} \right)^2$$

$$h_{\max} = \frac{1}{2} \frac{(V_0 \sin \alpha)^2}{g}$$

Untuk $h_{\max} = 8$ m, $\alpha = 30^0$, dan $g = 10$ m/det^2 diperoleh

$$h_{\max} = \frac{1}{2} \frac{(V_0 \sin \alpha)^2}{g} \Rightarrow 8 = \frac{1}{2} \frac{(V_0 \sin 30^0)^2}{10}$$

$$\Rightarrow 8 = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{4} V_0^2\right)}{10}$$

$$\Rightarrow 8 = \frac{1}{80} V_0^2$$

$\therefore\ V_0^2 - 640 = 0$ .... (1)

$V_0^2 - 640 = 0 \Rightarrow (V_0 + \sqrt{640})(V_0 - \sqrt{640}) = 0$

$$\Rightarrow (V_0 + \sqrt{640}) = 0 \text{ atau } (V_0 - \sqrt{640}) = 0$$

$$\Rightarrow V_0 = -\sqrt{640} \text{ atau } V_0 = \sqrt{640}$$

$$\Rightarrow V_0 = -8\sqrt{10} \text{ atau } V_0 = 8\sqrt{10}$$

Jadi kecepatan batu (anak) ketapel meluncur adalah $V_0 = 8\sqrt{10}$ m/det.

- Bagaimana untuk $V_0 = -8\sqrt{10}$ m/det, apakah berlaku?

$V_0 = -8\sqrt{10}$ m/det tidak berlaku sebab kecepatan anak ketapel bergerak arah ke atas (positif).

- Temukan persamaan kuadrat pada langkah pemecahan Masalah 7.1, 7.2, 7.3, dan 7.4
    - $x^2 - 2x + 1 = 0$
    - $z^2 + 4z - 45 = 0$
    - $3z^2 + 2z - 85 = 0$
    - $x^2 - 64 = 0$
    - $v_0^2 - 640 = 0$
- Tuliskan ciri-ciri dari persamaan kuadrat secara individual dan diskusikan dengan teman secara klasikal.

Ciri-ciri persamaan kuadrat.

- Sebuah persamaan
- Pangkat tertinggi peubahnya adalah 2 dan pangkat terendah adalah 0
- Koefisien variabelnya adalah bilangan real
- Koefisien variabel berpangkat 2, tidak sama dengan nol
- Koefisien variabel berpangkat 1 dan 0 dapat bernilai 0.

Berdasarkan ciri-ciri persamaan kuadrat di atas, coba kamu tuliskan pengertian persamaan kuadrat dengan kata-katamu sendiri dan diskusikan hasilnya dengan temanmu secara klasikal. Dari hasil diskusi siswa secara klasikal ditetapkan didefinisi berikut.

Definisi 7.1

Persamaan kuadrat dalam x adalah suatu persamaan yang berbentuk $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, dan c bilangan real dan $a \neq 0$.

Keterangan: x adalah variabel atau peubah
a adalah koefisien dari x^2
b adalah koefisien dari x
c adalah konstanta persamaan

Contoh 7.1

Persamaan $2x + 5 = 0$, bukan persamaan kuadrat sebab persamaan $2x + 5 = 0$ dapat dibentuk menjadi persamaan $0x^2 + 2x + 5 = 0$, tetapi koefisien x^2 adalah nol. Hal ini menunjukkan bahwa persamaan $2x + 5 = 0$ tidak memenuhi syarat Definisi 7.1, sebab koefisien x^2 adalah 0. Persamaan $2x + 5 = 0$ adalah persamaan linear satu peubah.

Contoh 7.2

Sebuah bola bergerak dari ketinggian h m. Ketinggian bola dari tanah untuk setiap detiknya ditentukan fungsi waktu $h(t) = 20t - 5t^2$. Saat bola tiba di atas tanah, apa yang kamu temukan?

Penyelesaian

Saat bola tiba di atas tanah, $h(t) = 0$.
$h(t) = 0 \Rightarrow h(t) = 20t - 5t^2 = 0$.
Persamaan $20t - 5t^2 = 0$ termasuk persamaan kuadrat sebab persamaan $20t - 5t^2 = 0$ dapat ditulis menjadi $-5t^2 + 20t + 0 = 0$, dengan koefisien $a = -5 \neq 0$, $b = 20$ dan $c = 0$. Berdasarkan Definisi 7.1 persamaan $20t - 5t^2 = 0$ merupakan persamaan kuadrat dengan satu variabel, yaitu t.

Contoh 7.3

Persamaan $x^2 + y^2 - 2x + 5 = 0$, bukan persamaan kuadrat satu peubah sebab persamaan tersebut memuat dua peubah, yaitu x dan y.

Latihan 7.2

Di depan sebuah sekolah akan dibangun lapangan bola basket. Tanah kosong yang tersedia berukuran 60 m × 30 m. Karena dana terbatas, maka luas lapangan yang direncanakan adalah 1000 m^2. Untuk memperoleh luas yang diinginkan, ukuran panjang tanah dikurangi x m dan ukuran lebar dikurangi x m. Dapatkah kamu menemukan sebuah persamaan kuadrat dari masalah ini?

Uji Kompetensi 7.1

1. Apakah persamaan yang diberikan merupakan persamaan kuadrat? Berikan alasanmu!
   a. $x^2y = 0, \ y \in R, y \neq 0.$
   b. $x + \dfrac{1}{x} = 0, \ x \neq 0.$
2. Robert berangkat kesekolah mengenderai sepeda. Jarak sekolah dari rumahnya 12 km. Robert berangkat dengan kecepatan awal sepeda bergerak 7 km/jam. Karena Robert semakin lelah, kecepatan sepedanya mengalami perlambatan 2 km/jam. Berapa lama waktu yang digunakan Robert sampai di sekolah.
3. Pada sebuah kerucut lingkaran tegak diketahui bahwa: penambahan volume karena jari-jarinya bertambah sepanjang 24 cm sama dengan penambahan volume karena tingginya bertambah 24 cm. Jika tinggi semula kerucut 3 cm, berapakah jari-jari kerucut semula ?
4. Dua buah jenis printer komputer akan digunakan untuk mencetak satu set buku. Jenis printer pertama, $\dfrac{1}{x}$ jam lebih cepat dari jenis printer kedua untuk menyelesaikan cetakan satu set buku. Jika kedua jenis printer digunakan sekaligus, maka waktu yang digunakan untuk mencetak satu set buku adalah 4 jam. Berapa waktu yang dibutuhkan printer jenis kedua untuk mencetak satu set buku.

5. Jika $a^2 + a - 3 = 0$, maka nilai terbesar yang mungkin dari $a^3 + 4a^2 + 9988$ adalah. . . .
6. Jika $a^3 + b^3 = 637$ dan $a + b = 13$, maka nilai dari $(a-b)^2$ adalah. . . .
7. Bentuk faktorisasi dari : $4kn + 6ak + 6an + 9a^2$ adalah. . .
8. Jika $a + b + c = 0$ dengan $a, b, c \neq 0$, maka nilai

$$\left[a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]^2$$

Projek

Rancanglah minimal dua masalah nyata di lingkungan sekitarmu yang terkait dengan persamaan kuadrat dan berilah penyelesaian kedua masalah tersebut. Buatlah laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas.

2. Menentukan Akar-akar Persamaan Kuadrat

Ada beberapa cara (aturan) menentukan akar-akar (penyelesaian) persamaan kuadrat. Aturan tersebut seluruhnya diturunkan dari konsep (Definisi-7.1) yang telah kita temukan. Aturan tersebut antara lain, cara memfaktorkan, melengkapkan kuadrat sempurna, dan rumus ABC. Ketiga aturan ini memiliki kelebihan dan kelemahan terkait dengan efisiensi waktu yang digunakan untuk menentukan akar-akar sebuah persamaan kuadrat. Agar lebih terarah pembahasan kita, mari kita coba memecahkan masalah-masalah yang diberikan.

1) Cara Pemfaktoran

Temukan pola atau aturan memfaktorkan, melengkapkan kuadrat sempurna, dan menemukan rumus *ABC* berdasarkan konsep persamaan kuadrat untuk menentukan akar-akarnya (harga-harga x yang memenuhi persamaan).

Selesaikanlah masalah di atas, agar pekerjaan kamu lebih efektif pahamilah beberapa pertanyaan berikut!

a) Apa yang dimaksud dengan memfaktorkan? Berdasarkan Definisi-7.1, kita memiliki bentuk umum persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$. Nilai x dapat kita tentukan dengan cara

pemfaktoran. Cara pemfaktoran dapat kita lakukan dengan memperhatikan koefisien x^2, x, dan konstanta c.

b) Ada berapa kasus yang dapat kamu pilah agar pemfaktoran persamaan kuadrat dapat terwakili seluruhnya.

Contoh 7.4

Tentukan akar-akar persamaan kuadrat $3z^2 + 2z - 85 = 0$ dengan cara pemfaktoran.

Penyelesaian

$$3z^2 + 2z - 85 = \frac{1}{3}(9z^2 + 6z - 255) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}(9z^2 + 3(17 - 15)z + (17 \times (-15)) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}((9z^2 + 51z) - (45z + 255)) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}((3z + 17)3z - 15(3z + 17)) = 0$$

$$\Rightarrow (3z + 17)(3z - 15) = 0 \text{ atau } (3z + 17)(z - 5) = 0$$

$m = 17$
$n = -15$
$m + n = 2 = b$
$m \times n = -255 = ac$

Harga-harga z yang memenuhi adalah $z = \frac{-17}{3}$ atau $z = 5$. Sehingga himpunan penyelesaian persamaan $3z^2 + 2z - 85 = 0$ adalah $\left\{\frac{-17}{3}, 5\right\}$.

2) Cara Melengkapkan Kuadrat Sempurna

Untuk menemukan aturan penentuan akar-akar persamaan kuadrat dengan cara melengkapkan kuadrat sempurna cermati beberapa pertanyaan berikut.

a) Apa yang dimaksud melengkapkan kuadrat sempurna?
b) Apakah kamu masih ingat pelajaran di SMP bahwa $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$?
c) Dapatkah kamu membentuk persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$ dalam bentuk $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$?
d) Apakah seluruh bentuk persamaan kuadrat dapat ditentukan akarnya dengan teknik kuadrat sempurna?

Berdasarkan Definisi-7.1, kita memiliki bentuk umum persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$. Untuk $a = 1$,

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + bx + c - c = 0 - c$$

$$\Rightarrow x^2 + bx + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 = \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c$$

$$\Rightarrow (x + \frac{1}{2}b)^2 = \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c$$

$$\Rightarrow (x + \frac{1}{2}b) = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c}\text{, jika } \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c \geq 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{x} = -\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c}\text{, jika } \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c \geq 0$$

3) Menggunakan Rumus *ABC*

Masih ingatkah kamu rumus *abc* waktu belajar persamaan kuadrat di SMP? Darimana rumus itu diturunkan? Bagaimana cara menemukannya?. Untuk itu perhatikan beberapa pertanyaan berikut.

a) Dapatkah kamu membagi persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dengan koefisien a? mengapa?
b) Setelah kamu membagi persamaan dengan koefisien a, dapatkah kamu melakukan manipulasi aljabar untuk mendapatkan bentuk kuadrat sempurna?
c) Bagaimana memanipulasi dan menyederhanakan persamaan agar diperoleh nilai x_1 dan x_2?
d) Akar persamaan kuadrat adalah dua bilangan, dapatkah kamu membedakan jenis akar-akar itu dari segi jenis bilangannya dan nilainya? Apa yang membedakan akar-akar tersebut?
e) Temukanlah jenis-jenis akar-akar persamaan kuadrat dilihat dari nilai diskriminan.

Berdasarkan Definisi-7.1, bentuk umum persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}\text{x} + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}\text{x} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\Rightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow (x + \frac{b}{2a}) = \pm\sqrt{\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sifat-1

Persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, dan c bilangan real dan $a \neq 0$, maka akar-akar persamaan tersebut adalah

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

3. Menemukan Rumus Untuk Menentukan Hasil Jumlah dan Hasil Kali Akar-akar Persamaan Kuadrat

Akar-akar sebuah persamaan kuadrat dapat dijumlahkan atau dikalikan. Bagaimana menentukan hasil jumlah dan hasil kali akar-akar dan kaitannya dengan koefisien-koefisien persamaan kuadrat tersebut? Untuk itu selesaikanlah masalah berikut.

Temukan aturan (rumus) menentukan hasil jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat!

Selesaikanlah masalah di atas, lakukan tugas bersama temanmu satu kelompok. Beberapa pertanyaan yang kamu harus cermati untuk menemukan rumus hasil jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat antara lain:

a) Dapatkah kamu menentukan akar-akar persamaan kuadrat dengan aturan yang sudah kamu miliki? Aturan mana yang kamu pilih dari tiga cara di atas terkait dengan menemukan rumus hasil jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat?
b) Bagaimana syarat menjumlahkan dan mengalikan dua bentuk akar?
c) Dapatkah kamu menyatakan hasil jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat dalam koefisien-koefisien persamaan tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan rumus *ABC* di atas, akar-akar persamaan kuadrat adalah

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ dan } x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

a. Jumlah Akar-akar Persamaan Kuadrat

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

b. Hasil Kali Akar-akar Persamaan Kuadrat

$$x_1 \times x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Berdasarkan kedua rumus di atas, disimpulkan

Sifat-2

Persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$ dengan akar-akar x_1 dan x_2, maka diperoleh

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{dan} \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

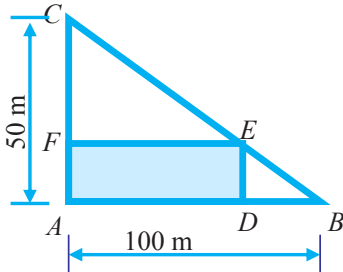
4. Persamaan Kuadrat Dengan Akar-akar x_1 dan x_2

Jika diketahui akar-akar persamaan kuadrat x_1 dan x_2, maka kita dapat menemukan persamaan kuadratnya. Sehingga permasalahan kita saat ini adalah sebagai berikut.

Temukan aturan untuk menentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya x_1 dan x_2.
Selesaikanlah masalah di atas, lakukan bersama temanmu satu kelompok. Agar pekerjaan kamu lebih efektif pahamilah beberapa pertanyaan berikut

a) Bagaimana kamu akan mengkonstruk sebuah persamaan kuadrat dengan akar-akar yang diberikan?
b) Apa keterkaitan rumus hasil jumlah dan rumus hasil kali akar-akar yang diberikan?

Jika diketahui akar-akar persamaan kuadrat x_1 dan x_2 maka kita dapat menemukan persamaan kuadratnya. Berdasarkan definisi-1, kita memiliki bentuk umum persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0 &\Rightarrow x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{c}{a} = 0 \\
&\Rightarrow x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \times x_2 = 0 \\
&\Rightarrow (x - x_1)x - x_2(x - x_1) = 0 \\
&\Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0
\end{aligned}
$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Sifat-3

Persamaan kuadrat dengan akar-akar x_1 dan x_2 adalah $(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

Uji Kompetensi 7.2

1. Persamaan $(m - 1)x^2 + 4x + 2m = 0$ mempunyai akar-akar real. Tentukan nilai m yang memenuhi!

2. Jika α dan β adalah akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, tunjukkan bahwa

   a. $\alpha^4 + \beta^4 = \dfrac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$

   b. $(\alpha - \beta)^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{a^2}$

3. Akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 2x + 5 = 0$ adalah p dan q. Temukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya $(p + 2)$ dan $(q + 2)$!

4. Dua buah jenis mesin penggiling padi digunakan untuk menggiling satu peti padi. Untuk menggiling satu peti padi, mesin jenis pertama lebih cepat $\frac{1}{2}$ jam dari mesin jenis kedua. Sementara jika kedua mesin digunakan sekaligus, dapat menggiling satu peti padi selama 6 jam.

   a. Berapa jam waktu yang digunakan mesin jenis pertama untuk menggiling satu peti padi.

   b. Berapa jam waktu yang digunakan mesin jenis kedua untuk menggiling satu peti padi.

5. Jika $a^2 + a - 3 = 0$, maka nilai terbesar yang mungkin dari $a^3 + 4a^2 + 9988$ adalah ....

6. Pada sebidang tanah akan didirikan sebuah sekolah SD. Bentuk tanah dan ukuran tanah dapat dilihat pada gambar.

7. $\dfrac{x}{x^2+3x+1} = a$, nilai dari $\dfrac{x^2}{x^4+3x^2+1} = \cdots$

8. Jika $\sqrt{2009x^2 - 11x + 144} + \sqrt{2009x^2 - 11x + 96} = 16$ maka nilai yang mungkin untuk $\sqrt{2009x^2 - 11x + 144} - \sqrt{2009x^2 - 11x + 96}$ adalah □

9. Hasil pemfaktoran dari : $3x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 6y - 16$ adalah ....

Projek

Himpunlah informasi penggunaan sifat-sifat dan aturan yang berlaku pada persamaan kuadrat di bidang ekonomi, fisika, dan teknik bangunan. Kamu dapat mencari informasi tersebut dengan menggunakan internet, buku-buku dan sumber lain yang relevan. Temukan berbagai masalah dan pemecahannya menggunakan aturan dan sifat-sifat akar persamaan kuadrat. Buatlah laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas!

II. FUNGSI KUADRAT

1. Menemukan Konsep Fungsi Kuadrat

Fungsi kuadrat sering kita temukan dalam permasalahan kehidupan nyata yang menyatu pada fakta dan lingkungan budaya kita. Konsep fungsi kuadrat dapat ditemukan di dalam pemecahan permasalahan yang kita hadapi. Untuk itu perhatikan dengan cermat permasalahan-permasalahan yang diberikan.

Masalah-7.5

Untuk pengadaan air bersih bagi masyarakat desa, anak rantau dari desa tersebut sepakat membangun tali air dari sebuah sungai di kaki pegunungan ke rumah-rumah penduduk. Sebuah pipa besi yang panjangnya *s* dan berdiameter d ditanam pada kedalaman 1 m di bawah permukaan air sungai sebagai saluran air. Tentukanlah debit air yang mengalir dari pipa tersebut. (Gravitasi bumi adalah 10 m/det^2).

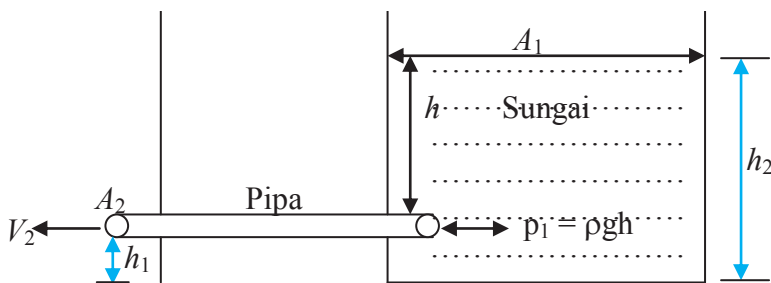
Gambar 7.6 Sumber Air Bersih

Pahamilah masalah di atas, artinya kamu tuliskan hal apa yang diketahui, apa yang ditanyakan, dan interpretasikan masalah dalam Gambar 7.6. Gunakan variabel

untuk menyatakan masalah dalam matematika. Ingat konsep dan aturan-aturan apa saja yang terkait dengan masalah yang dihadapi sehingga masalah tersebut dapat diselesaikan.

Beberapa pertanyaan yang harus kamu pahami untuk dapat memecahkan masalah dengan baik antara lain sebagai berikut.

1) Apa yang terjadi jika luas permukaan sungai jauh lebih luas dari luas permukaan pipa?
2) Bagaimana tekanan air pada pangkal pipa di ujung pipa serta aturan apa yang terkait dengan keadaan tersebut?
3) Dapatkah kamu menentukan kecepatan air yang keluar dari mulut pipa menggunakan aturan pada pertanyaan 2)?
4) Dapatkah kamu menentukan besarnya debit air yang mengalir dari pipa dengan mengingat rumus debit zat cair, saat kamu belajar di SD?
5) Apa keterkaitan luas penampang pipa dengan kecepatan air mengalir?

Alternatif Penyelesaian

Gambar 7.7 Ilustrasi Posisi Pipa di Dalam Sungai

Misalkan:

p_1 adalah tekanan air pada mulut pipa

p_2 adalah tekanan air pada ujung pipa

h adalah kedalaman pipa di bawah permukaan air sungai = 1 m

h_1 adalah ketinggian pipa dari permukaan tanah

h_2 adalah ketinggian permukaan air sungai

V_1 adalah kecepatan air sungai mengalir

V_2 adalah kecepatan air mengalir dari ujung pipa

A_1 adalah penampang permukaan air sungai

A_2 adalah penampang permukaan ujung pipa

g adalah gravitasi bumi = 10 m/det^2.

- Apa yang terjadi jika A_1 jauh lebih luas dari A_2. Diharapkan jawaban siswa sebagai berikut.

Jika $A_1 >>> A_2$ maka $V_1 <<< V_2$, akibatnya V_1 menuju 0 (nol).
Karena tekanan air pada pangkal pipa dan diujung pipa sama maka berdasarkan gambar di atas diperoleh persamaan

$$\rho_1 = \rho_2$$

$$\rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2$$

$$\rho g(h_1 - h_2) = \frac{1}{2}\rho V_2^2 \quad \text{(karena } V_1^2 \text{ menuju nol)}$$

$$gh = \frac{1}{2} V_2^2 \quad \text{(karena } h = h_1 - h_2\text{)}$$

$$2gh = V_2^2 \Rightarrow V_2 = \sqrt{2gh}$$

$\therefore$ Kecepatan air mengalir dari pipa adalah $V = \sqrt{2gh}$

Debit air yang mengalir dari sebuah pipa adalah volume air yang mengalir persatuan waktu.

$$q = \frac{volume}{waktu}$$

$$= \frac{A \times S}{t}$$

$$= A \times V.$$

$q = (\frac{1}{4}\pi d^2)(\sqrt{2gh})$ (penampang pipa berbentuk lingkaran, luas penampang pipa adalah A)

$= \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$, ($d$ adalah diameter pipa))

Debit air yang mengalir dari pipa dinyatakan dalam fungsi berikut

$$\therefore q(d) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)d^2, d \in R, d \geq 0$$

Kain tenun yang berasal dari Sumatera Barat atau yang lebih dikenal dengan songket Minangkabau merupakan suatu hasil karya tradional yang perlu dipertahankan. kekayaan motifnya ternyata juga memiliki arti dan nilai kebersamaan tersendiri. Adapun jenis-jenis motif dari kain songket Minangkababu tersebut diantaranya adalah motif Pucuk Rabuang, motif Itiak Pulang Patang, motif Kaluak Paku, dan yang lainnya. Motif Kaluak Paku misalnya memiliki makna bahwa kita sebagai manusia haruslah mawas diri sejak kecil dan perlu belajar sejak dini mulai dari keluarga. Pendidikan dalam keluarga menjadi bekal utama untuk menjalankan kehidupan di masyarakat. Setelah dewasa kita harus bergaul ke tengah masyarakat, sehingga bekal hidup dari keluarga bisa menjadikan diri lebih kuat dan tidak mudah terpengaruh hal negatif. Selain itu juga, motif Kaluak Paku juga memiliki makna lainnya, yaitu seorang pemimpin harus mampu menjadi teladan bagi masyarakat yang ada disekitarnya. Ukuran panjang dan lebar kain songket cukup bervariasi. Ukuran panjang dan lebar kain songket cukup bervariasi. Sekarang mari kita perhatikan salah satu jenis kain songket yaitu kain sonket motif Kaluak Paku, dalam hal ini kita jadikan bahan inspirasi mengangkat masalah matematika terkait fungsi kuadrat.

Masalah-7.6

Gambar 7.8 Kain Songket

Sebuah kain songket dengan ukuran panjang $\frac{9}{4}$ m dan lebar $\frac{3}{4}$ m. Di bagian tengah terdapat 5 bagian daerah yang luas seluruhnya $\frac{451}{400}$ m. Tentukan ukuran bagian kain songket yang berwarna merah dan daerah berambu benang.

- Coba sendiri!

Pahamilah masalah di atas, artinya kamu tuliskan hal apa yang diketahui, apa yang ditanyakan, dan interpretasikan dalam gambar. Gunakan variabel untuk menyatakan masalah dalam matematika. Ingat konsep dan aturan-aturan apa saja yang terkait dengan masalah yang dihadapi sehingga dapat terpecahkan.

Cermatilah beberapa pertanyaan yang mengarahkan kamu bekerja lebih efektif.

1) Berbentuk apakah daerah bagian dalam kain songket. Bagaimana kamu menentukan luas daerah tersebut?

2) Apakah ada keterkaitan konsep dan prinsip persamaan kuadrat untuk menentukan ukuran daerah bagian dalam kain songket?

Kenyataan hidup terkadang berbeda dengan apa yang kita harapkan. Seperti Pak Ketut yang memiliki Ijazah Sarjana Pertanian telah lama dan berulangkali melamar pekerjaan di kota Jakarta. Ternyata, Ia belum beruntung memanfaatkan ijazahnya sampai saat ini. Akhirnya, Ia kembali ke Pulau Dewata dan berencana membuat keramba ikan Gurami dan Udang. Tetapi, Ia mendapat masalah sebagai berikut.

Masalah-7.7

Pak Ketut memiliki jaring jala sepanjang 60 m. Ia ingin membuat keramba ikan gurami dan udang. Kedua keramba ikan dibuat berdampingan, seperti tampak pada gambar berikut.

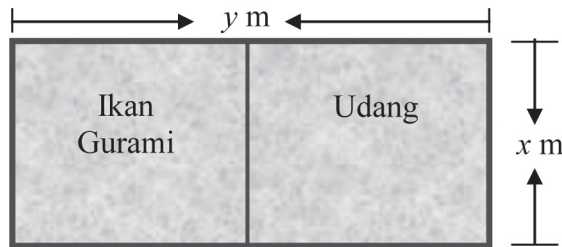
Gambar 7.9 Keramba Ikan Gurami dan Udang

Misalkan panjang keramba y m dan lebarnya x m, serta kelilingnya keramba k m. Tentukanlah ukuran keramba agar luasnya maksimum!

Coba amati gambar keramba yang diinginkan dan renungkan beberapa pertanyaan berikut.

1) Bagaimana bentuk keramba yang direncanakan Pak Ketut?
2) Adakah konsep dan prinsip matematika yang terkait untuk menentukan panjang keliling permukaan keramba?
3) Adakah konsep dan prinsip matematika untuk menentukan luas daerah permukaan keramba ?
4) Bagaimana menentukan ukuran panjang dan lebar permukaan keramba agar luasnya maksimum dengan jaring jala yang tersedia?

Alternatif Penyelesaian

Penampang permukaan keramba dapat digambarkan sebagai berikut.

Gambar 7.10 Posisi Tambak

Karena panjang jaring jala yang tersedia adalah 60 m maka keliling keseluruhan permukaan keramba ikan adalah

$$K = 2y + 3x = 60 \Rightarrow 2y = 60 - 3x \;\Rightarrow\; y = 30 - \frac{3}{2}x$$

Luas keseluruhan permukaan keramba ikan adalah

L = panjang × lebar

$L = y \times x$

$$y = 30 - \frac{3}{2}x \;\Rightarrow\; L = y \times x \;\Rightarrow L = (30 - \frac{3}{2}x)x$$

$$\Rightarrow L = 30x - x^2$$

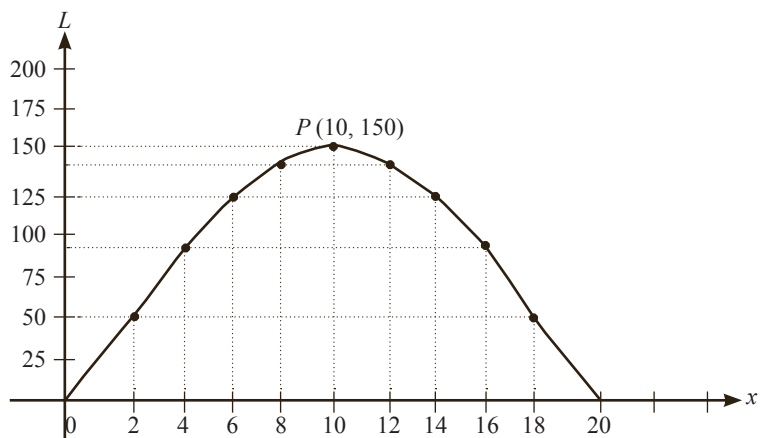
Karena luas permukaan keramba tergantung nilai x maka persamaan fungsi luas dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\therefore\; L(x) = 30x - \frac{3}{2}x^2, x \in R, x \geq 0$$

Dengan mengambil beberapa harga x, diperoleh beberapa harga L dan disajikan pada tabel berikut

Tabel 7.1 Nilai L dengan x merupakan bilangan bulat genap positif

Nilai x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Nilai L	0	54	96	126	144	150	144	126	96	54	0

Sekarang mari kita gambarkan grafik fungsi $L(x) = 30x - x^2$ pada bidang koordinat dengan bantuan nilai-nilai x dan L yang ada pada tabel di atas.

Gambar 7.11 Grafik Fungsi Kuadrat

Coba cermati harga-harga x dan L di dalam Tabel 7.1 dan grafik fungsi $L(x) = 30x - \frac{3}{2}x^2,\ x \geq 0$ memiliki ciri-ciri sebagai berikut.

a) Kurva terbuka ke bawah
b) Grafik memotong sumbu-x pada dua titik yang berbeda yaitu titik (0, 0) dan titik (20, 0).
c) Grafik fungsi mencapai puncak pada titik (10, 150).
d) Garis $x = 10$ membagi dua luas (sama besar) daerah di bawah kurva, sehingga garis $x = 10$ dapat dikatakan sebagai sumbu simetri grafik fungsi $L(x) = 30x - \frac{3}{2}x^2$.

Berdasarkan grafik fungsi di atas, luas maksimum diperoleh saat lebar dan panjang permukaan keramba ikan, yaitu $x = 10$ m dan $y = 15$ m

$x = 10$ m dan $y = 30 - \frac{3}{2}x \Rightarrow y = 15$ m

Luas maksimum permukaan keramba ikan adalah $L = 150\ \text{m}^2$

Perhatikan kembali setiap langkah pemecahan Masalah 7.5, 7.6, dan Masalah 7.7. Masih ingatkah kamu contoh fungsi kuadrat ketika belajar di SMP. Coba temukan model-model matematika dari setiap permasalahan yang merupakan fungsi kuadrat. Kemudian coba temukan ciri-ciri dari fungsi itu dan tuliskan konsep (pengertian) fungsi kuadrat berdasarkan ciri-ciri yang kamu ditemukan, serta hasilnya diskusikan dengan temanmu.

Definisi 7.2

Fungsi kuadrat dalam x adalah suatu fungsi yang berbentuk $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.

Misalkan $A, B \subset R$, didefinisikan fungsi

$f : A \rightarrow B$, dengan $f(x) = ax^2 + bx + c;\quad a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$.

Dengan : x adalah variabel bebas atau peubah bebas
a adalah koefisien dari x^2
b adalah koefisien dari x
c adalah konstanta persamaan
$f(x)$ adalah nilai fungsi yang tergantung pada nilai variabel x.

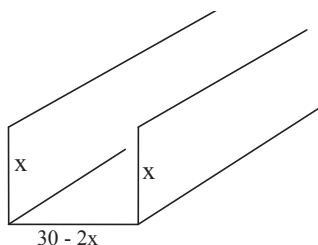
Selanjutnya ujilah beberapa fungsi berikut, apakah merupakan fungsi kuadrat?

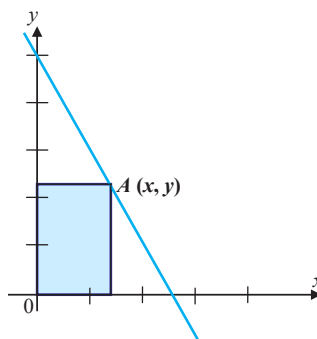
Latihan 7.4

Apakah fungsi berikut merupakan fungsi kuadrat?

1. Misalkan $A, B \subset R$, didefinisikan fungsi
   $g : A \rightarrow B$, dengan $g(x) = c, \forall x \in A, c \in B$.
2. Didefinisikan $h(t) = (t - 2)^2$, $t \in R$, apakah h merupakan fungsi kuadrat?
3. Misalkan himpunan $A = \{x \mid -2 \leq x < 3, x \in R\}$
   $B = \{y \mid -8 \leq y < 20, y \in R\}$
   Didefinisikan $f : A \rightarrow B$
   $f : x \rightarrow x^3, \forall x \in A$
4. Misalkan himpunan $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 3, x \in R\}$ dan
   $B = \{y \mid 8 \leq y \leq 26, \forall y \in R\}$
   Didefinisikan $f : A \rightarrow B$, dengan
   $f(x) = x^2 + 3x + 8, \forall x \in A$

Uji Kompetensi 7.3

1. Pekerjaan Pak Suradi adalah pembuat Talang Air. Ia mendapat pesanan membuat sebuah Talang Air dari lembaran seng yang lebarnya 30 cm dengan melipat lebarnya atas tiga bagian seperti terlihat pada Gambar di bawah ini.

   Bantulah Pak Suradi menentukan ukuran x agar volume air yang tertampung maksimal.

2. Titik $A(x, y)$ terletak pada garis g dengan persamaan $2x + y = 10$. Dari titik A dibuat garis-garis tegak lurus terhadap Sumbu-x dan Sumbu-y sehingga terbentuk persegi panjang dengan diagonal OA. Perhatikan gambar berikut!

   a) Jika L menyatakan luas daerah persegi panjang yang terbentuk, nyatakan lah L sebagai fungsi x.
   b) Apakah L sebagai fungsi merupakan fungsi kuadrat dalam x?

Projek

Rancanglah permasalahan terkait gerakan peluru dan ekonomi yang menerapkan konsep dan aturan fungsi kuadrat. Buatlah pemecahan masalah tersebut dalam sebuah laporan serta sajikan di depan kelas.

2. Grafik Fungsi Kuadrat

Dari hasil pemecahan Masalah 7.8, kita telah peroleh persamaan fungsi kuadrat yang menyatakan besar debit air yang mengalir dari sebuah pipa adalah $q(d) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\ d^2,\ d \in R,\ d \geq 0$. Misalkan ukuran diameter pipa adalah x dan besar debit air yang mengalir adalah y. Berarti y dapat dinyatakan dalam x, yaitu $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\ x^2, x \in R, x \geq 0$.

> Temukan grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\ x^2, x \in R$ dari grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\ x^2,\ x \in R,\ x \geq 0$.

Beberapa pertanyaan arahan yang perlu kamu cermati untuk memperoleh grafik fungsi $y = f(x) = (-\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\ x^2, x \in R$ dari grafik fungsi kuadrat $f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)$. $x^2, x \in R, x \geq 0$.

1) Pikirkan apa saja yang kamu butuhkan untuk menggambar grafik fungsi $f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\ x^2, x \in R, x \geq 0$ dan ingat kembali bagaimana menggambar grafik fungsi kuadrat di SMP.

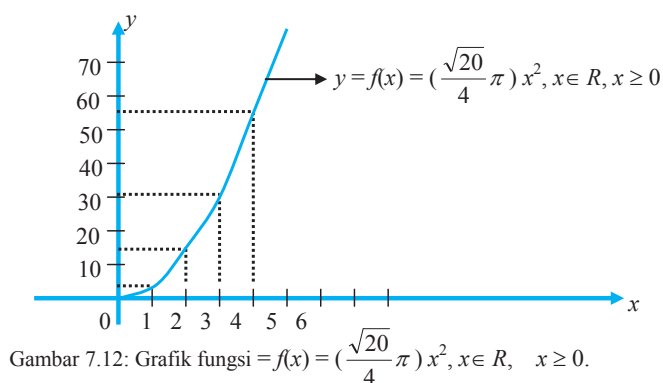
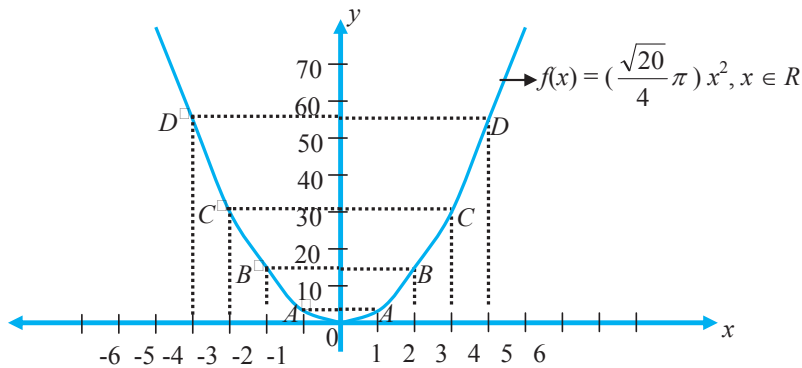
2) Apa perbedaan fungsi kuadrat $f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\ x^2, x \in \text{R}, x \geq 0$ dengan fungsi kuadrat $y = f(x) = (-\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\ x^2, x \in R$
3) Apa kaitan konsep pencerminan dengan masalah ini?
4) Bagaimana komponen-komponen grafik fungsi setelah dicerminkan?
5) Dapatkah kamu memberikan perbedaan kedua grafik fungsi kuadrat tersebut?
6) Bilamana grafik memotong sumbu x dan memotong sumbu y?

- Ingat kembali, bagaimana menggambarkan grafik persamaan fungsi kuadrat dan memanfaatkan sifat pencerminan untuk memperoleh grafik persamaan fungsi kuadrat yang baru.

Perhatikan fungsi kuadrat $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\, x^2, x \in R, x \geq 0,$ yang menyatakan besarnya debit air yang mengalir dari pipa. Besarnya debit air yang mengalir dari pipa tergantung besarnya ukuran diameter (x) pipa. Jika $x = 0$, maka debit air adalah $y = f(x) = f(0) = 0$. Untuk beberapa nilai x diberikan, diperoleh nilai $y = f(x)$ disajikan dalam tabel berikut.

x	0	1	2	3	4
$y = f(x)$	0	3,51	14,04	31,6	56,17

Grafik persamaan fungsi kuadrat $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\, x^2, x \in R, x \geq 0$ dapat digambarkan sebagai berikut.

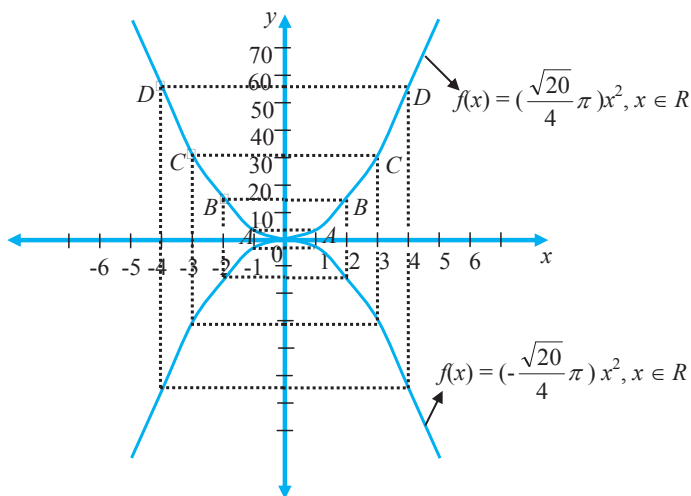
Gambar 7.12: Grafik fungsi $= f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\, x^2, x \in R, \quad x \geq 0.$

Dengan mencerminkan grafik persamaan fungsi kuadrat $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\, x^2,$ $x \in R,\ x \geq 0$ terhadap Sumbu-y, maka diperoleh sebuah parabola berikut.

Gambar 7.13: Grafik fungsi $(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\, x^2, x \in R$

Ciri-ciri fungsi kuadrat $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\, x^2, x \in R$ dan parabola di atas adalah sebagai berikut.

- Koefisien x^2 adalah $a = \frac{\sqrt{20}}{4}\pi > 0$
- Kurva terbuka ke atas
- Memiliki titik puncak (titik balik minimum) di titik O (0, 0)
- Memiliki sumbu simetri yang membagi dua daerah kurva sama besar, yaitu garis $x = 0$ dan nilai minimum $y = f(0) = 0$
- Nilai diskriminan, $D = b^2 - 4ac = 0$
- Kurva menyinggung sumbu x pada titik O(0, 0)
- Cerminkan grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\, x^2, x \in R$ terhadap

  Sumbu-x dan selidiki sifat-sifat grafik fungsi kuadrat yang ditemukan.

Kita cerminkan grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\, x^2, x \in R$ terhadap Sumbu-x atau garis $y = 0$. Dengan mengingat kembali sifat-sifat pencerminan bahwa arah benda dengan bayangannya selalu berlawanan arah. Sehingga nilai fungsi kuadrat $y = f(x) = \left(\frac{\sqrt{20}}{4}\pi\right)x^2,\ x \in R$ berubah dari bernilai positif menjadi negatif. Perubahan tersebut diikuti perubahan fungsinya dari $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)$.

x^2, $x \in R$ menjadi $y = f(x) = (-\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\,x^2$, $x \in R$. Secara lengkap bayangan grafik persamaan fungsi kuadrat $y = f(x)$ setelah dicerminkan terhadap Sumbu-x adalah sebagai berikut.

Gambar 7.14: Grafik fungsi $f(x)$ dan grafik pencerminan $f(x)$

Ciri-ciri fungsi kuadrat $y = f(x) = (-\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\,x^2$, $x \in R$ dan parabola hasil pencerminan terhadap sumbu-x (Gambar-7.14) adalah sebagai berikut.

- Koefisien x^2 adalah a $= -\frac{\sqrt{20}}{4}\pi < 0$
- Kurva terbuka ke bawah
- Memiliki titik puncak (titik balik maksimum) di titik O (0, 0)
- Memiliki sumbu simetri yang membagi dua daerah kurva sama besar, yaitu garis $y = 0$ dan nilai minimum $f(0) = 0$
- Nilai diskriminan, $D = b^2 - 4ac = 0$
- Kurva menyinggung Sumbu x pada titik O(0, 0)

Apa kesimpulan dari hasil pencerminan tersebut?

Kesimpulan

Misalkan $g(x) = ax^2, x \in R$, jika dicerminkan terhadap Sumbu-x maka diperoleh $g^*(x) = -ax^2, x \in$ R dengan sumbu simetri adalah Sumbu-y dan memiliki titik puncak O (0, 0).

Masalah-7.8

Diberikan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan a ≠ 0.

a. Temukan persamaan garis simetri (sumbu simetri) dan titik puncak grafik fungsi kuadrat tersebut.
b. Temukan grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$ dari grafik fungsi kuadrat $g(x) = ax^2$, $x \in R$, $a \neq 0$.
c. Temukan titik potong grafik dengan sumbu x dan sumbu y.
d. Temukan sifat-sifat grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$ terkait nilai koefisien a dan titik puncak parabola.

Untuk memecahkan masalah di atas, cermati beberapa grafik fungsi kuadrat yang telah digambar sebelumnya dan beberapa pertanyaan berikut:

1) Apa yang dimaksud dengan grafik fungsi kuadrat?
2) Apa yang dimaksud dengan persamaan garis sumbu simetris grafik fungsi kuadrat?
3) Apa yang dimaksud dengan titik puncak grafik fungsi kuadrat?
4) Bagaimana menemukan aturan penentuan persamaan garis simetris dan titik puncak grafik fungsi kuadrat?
5) Apa yang dimaksud dengan transformasi geser ?.
6) Apa kaitan transformasi geser dan sifat-sifatnya untuk memperoleh sebarang grafik fungsi kuadrat dari grafik fungsi kuadrat $g(x) = ax^2$, $x \in R$, dan $a \neq 0$?

7) Temukan arah pergeseran grafik fungsi kuadrat $g(x) = ax^2$, $x \in R$ untuk mendapatkan grafik fungsi $f(x) = g\left(x - \left(\frac{-b}{2a}\right)\right) + \left(\frac{-D}{4a}\right)$ dan syarat-syarat yang diperlukan!

8) Sifat-sifat apa saja yang kamu simpulkan dari grafik fungsi kuadrat $f(x)=a\left(x-\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)^2+\left(\frac{-D}{4a}\right)$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$ berkaitan dengan nilai koefisien a dan titik puncak grafik fungsi?

9) Dapatkah kamu memberi beberapa kemungkinan gambaran grafik fungsi kuadrat terkait nilai koefisien a, nilai diskriminan, titik potong terhadap sumbu-x, nilai fungsinya.

Berdasarkan Definisi 7.2, bentuk umum fungsi kuadrat adalah $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0 \Rightarrow f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}),\ a \neq 0$$

$$\Rightarrow f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}),\ a \neq 0$$

$$\Rightarrow f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2-4ac}{4a^2})],\ a \neq 0$$

$$\Rightarrow f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2-4ac}{4a}),\ a \neq 0$$

$$\Rightarrow f(x) = a(x - (\frac{-b}{2a}))^2 + (\frac{-D}{4a}),\ a \neq 0$$

Misalkan $g(x) = ax^2,\ x \in R,\ a \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = a(x - (\frac{-b}{2a}))^2 + (\frac{-D}{4a}),\ a \neq 0 \\ \text{dan } g(x) = ax^2,\ x \in R \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x - (\frac{-b}{2a})) + (\frac{-D}{4a})$$

Grafik fungsi $f(x) = g(x - (\frac{-b}{2a})) + (\frac{-D}{4a})$ adalah grafik fungsi kuadrat $g(x) = ax^2$, $x \in R$ yang digeser sejauh satuan kearah Sumbu-x dan digeser sejauh satuan ke arah Sumbu-y.

Sifat-4

Grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$, memiliki

a. Persamaan sumbu simetri $x = \frac{-b}{2a}$ dan

b. Titik puncak $P(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a})$.

Dari beberapa sajian grafik persamaan fungsi kuadrat sebelumnya turunkan sifat-sifat grafik persamaan fungsi kuadrat dan menyajikan beberapa kemungkinan kondisi grafik tersebut terkait dengan koefisien x^2 , nilai diskriminan dan nilai fungsi tersebut.

Dari fungsi kuadrat : $f(x) = a(x - (\frac{-b}{2a}))^2 + (\frac{-D}{4a})$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$, dapat diturunkan beberapa sifat.

Sifat-5

Jika $a > 0$, maka grafik persamaan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, dan c bilangan real $a \neq 0$ terbuka ke atas dan memiliki titik balik minimum $P(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a})$.

Sifat-6

Jika $a < 0$, maka grafik persamaan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, dan c bilangan real $a \neq 0$ terbuka ke bawah dan memiliki titik balik maksimum $P(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a})$.

Sifat-7

Grafik persamaan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c bilangan real dan $a \neq 0$. Misal $D = b^2 - 4ac$ (D adalah diskriminan)

a. Jika $D > 0$ maka grafik $y = f(x)$ memotong Sumbu-x pada dua titik berbeda

b. Jika $D = 0$ maka grafik $y = f(x)$ menyinggung Sumbu-x pada satu titik

c. Jika $D < 0$ maka grafik $y = f(x)$ tidak memotong Sumbu-x

Pada gambar berikut diperlihatkan berbagai kemungkinan letak parabola terhadap Sumbu-x

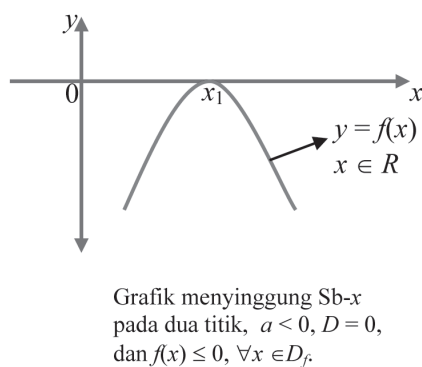
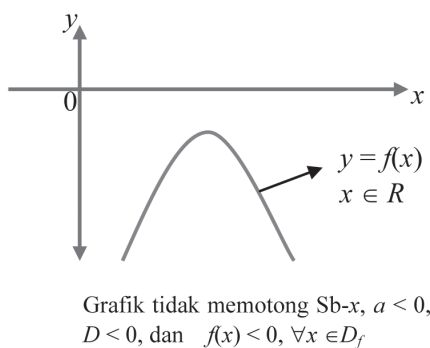
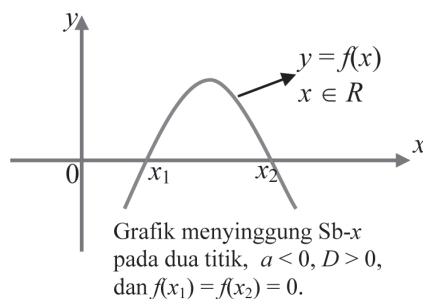
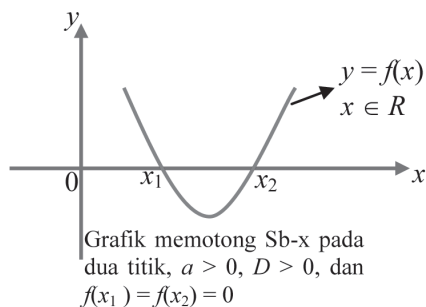
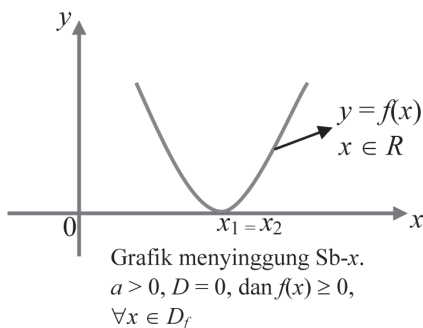
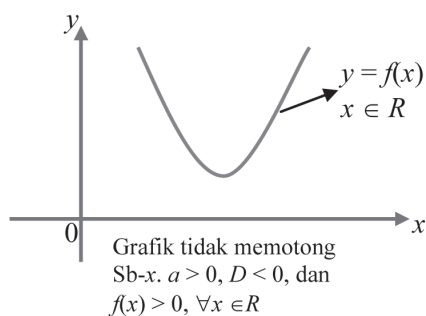
Grafik tidak memotong Sb-x. $a > 0$, $D < 0$, dan $f(x) > 0$, $\forall x \in R$

Grafik menyinggung Sb-x. $a > 0$, $D = 0$, dan $f(x) \geq 0$, $\forall x \in D_f$

Grafik memotong Sb-x pada dua titik, $a > 0$, $D > 0$, dan $f(x_1) = f(x_2) = 0$

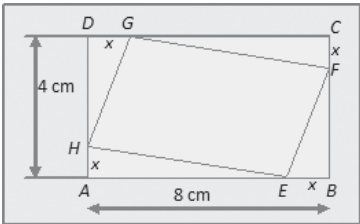
Grafik menyinggung Sb-x pada dua titik, $a < 0$, $D > 0$, dan $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Grafik tidak memotong Sb-x, $a < 0$, $D < 0$, dan $f(x) < 0$, $\forall x \in D_f$

Grafik menyinggung Sb-x pada dua titik, $a < 0$, $D = 0$, dan $f(x) \leq 0$, $\forall x \in D_f$.

3. Hubungan Persamaan Kuadrat dan Fungsi Kuadrat

Kita cermati konsep persamaan kuadrat dan fungsi kuadrat sebagai berikut.

- Persamaan kuadrat adalah suatu persamaan aljabar yang dinyatakan dalam bentuk $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.
- Fungsi kuadrat adalah suatu fungsi yang dinyatakan dalam bentuk $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.

Berdasarkan kedua konsep di atas, jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut

1. Apakah sebuah persamaan kuadrat dapat diperoleh dari sebuah fungsi kuadrat?
2. Jika disubtitusikan nilai x yang memenuhi persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ ke dalam persamaan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ apa yang kamu dapatkan
3. Dapatkah persamaan fungsi kuadrat dipandang sebuah persamaan kuadrat? Jelaskan.
4. Apa perbedaan konsep fungsi dengan konsep persamaan?

Sifat-8

Jika sebuah fungsi kuadrat diberi nilai k, dengan $k \in R$ maka diperoleh sebuah persamaan kuadrat.

Uji Kompetensi 7.4

1. Sebuah fungsi kuadrat mempunyai nilai maksimum -3 pada saat x = 2, sedangkan untuk x = - 2 fungsi bernilai -11. Tentukan fungsi kuadrat tersebut !
2. Tentukan luas minimum segi empat *EFGH* di bawah ini !

3. Temukan grafik fungsi kuadrat $f(x) = 4x^2 - 8x + 3$ dari grafik fungsi kuadrat $g(x) = 4x^2$!
4. Persegi *ABCD* dengan panjang sisinya a cm. Pada sisi *AB* diberi titik *E* dengan panjang *AE* adalah x cm. Diantara sisi *BC* diberi titik *F* dengan panjang $BF = AE$. Panjang $EB = FC$. Tentukan luas minimum *DEF* !
5. Daerah asal fungsi kuadrat $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$ adalah himpunan $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 3, x \in R$. Tentukan daerah hasil fungsi f !
6. Gambarkanlah grafik fungsi kuadrat di bawah ini.(untuk setiap x bilangan real)
   a. $f(x) = 3x^2+5x-4, x \in R.$
   b. $f(x) =-2x^2-3x+7, x \in R.$

Projek

Rancanglah masalah nyata yang melibatkan grafik fungsi kuadrat pada bidang teknik bangunan dan fisika. Buatlah pemecahan masalah tersebut dengan menerapkan berbagai sifat grafik fungsi kuadrat yang telah kamu pelajari. Buat laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Telah kita temukan konsep dan aturan yang berlaku pada persamaan dan fungsi kuadrat. Beberapa hal yang penting sebagai pegangan kita untuk mendalami dan melanjutkan materi pada bahasan berikutnya, dapat dirangkum sebagai berikut.

1. Bentuk umum Persamaan kuadrat adalah
   $ax^2 + bx + c = 0$, dengan $a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$.

2. Untuk menentukan akar-akar suatu persamaan kuadrat dapat dilakukan dengan cara berikut.
   a. Memfaktorkan.
   b. Melengkapkan Bentuk Kuadrat Sempurna.
   c. Menggunakan Rumus *abc*.

   Rumus *abc* adalah sebagai berikut.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3. Jumlah dan Hasil Kali Akar-Akar Persamaan Kuadrat
   Akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, berhubungan erat dengan koefisien-koefisien *a, b,* dan *c*. Jika x_1 dan x_2 merupakan akar-akar persamaan kuadrat, maka berlaku.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{dan} \quad x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

4. Bentuk persamaan kuadrat dengan akar-akar x_1 dan x_2 adalah $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

5. Karakteristik Grafik Fungsi Kuadrat
   Fungsi kuadrat memiliki bentuk umum dengan $a, b, c \in$ R dan $a \neq 0$. Dari bentuk aljabar tersebut, grafik fungsi kuadrat dapat diilustrasikan sebagi bentuk lintasan lengkung atau parabola dengan karakteristik sebagai berikut.
   a. Jika $a > 0$, maka parabola terbuka ke atas.
   b. Jika $a < 0$, maka parabola terbuka ke bawah.
   c. Jika $D < 0$, maka parabola tidak memotong maupun menyinggung sumbu x.
   d. Jika $D = 0$, maka parabola menyinggung sumbu x.
   e. Jika $D > 0$, maka parabola memotong sumbu x di dua titik.

6. Langkah-langkah yang diperlukan untuk membuat sketsa grafik fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx$ adalah sebagai berikut

a. Menentukan titik potong dengan sumbu x, diperoleh jika $y = 0$.
b. Menentukan titik potong dengan sumbu y, diperoleh jika $x = 0$.
c. Menentukan persamaan sumbu simetri $x = -\frac{b}{2a}$.
d. Menentukan nilai ekstrim grafik $y = \frac{D}{-4a}$.
e. Koordinat titik balik sebuah grafik fungsi kuadrat adalah $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{D}{4a}\right)$.

Kita telah menemukan berbagai konsep dan sifat-sifat yang berlaku pada persamaan dan fungsi kuadrat. Demikian juga, kita telah terapkan dalam berbagai pemecahan masalah nyata. Selanjutnya akan kita bahas tentang geometri terkait kedudukan titik, garis, sudut, dan bidang pada bidang datar dan ruang dimensi tiga. Penguasaan kamu pada materi pada setiap bahasan akan bermanfaat dalam mendalami materi selanjutnya.